Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Second semestre 2008/2009
SMA2/SMI2
Mathématiques 2 - Algèbre 2

Contrôle n°2

(17 Juin 2009 - Durée : 2 heures)

Problème. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base $\mathcal{B}$ est

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (i) Calculer le déterminant de A_a.

   (ii) Pour quelles valeurs de a la matrice A_a est inversible ?

   (iii) Déterminer le rang de A_a suivant les valeurs de a.

2. Pour $a = 1$, calculer A_1^2 et déduire A_1^n pour tout entier $n \geq 1$.

   <u>On prendra dans toute la suite $a = -1$, et on écrira $f = f_{-1}$ et $A = A_{-1}$.</u>

3. (i) Trouver une base (v_1, v_2) du sous-espace vectoriel $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.

   $f = 2\,\mathrm{id}$

   (ii) Soit le vecteur $v_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

   (iii) Donner la matrice $D = M(f, \mathcal{B}')$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

   (iv) Calculer D^n pour $n \geq 1$. Montrer que l'expression trouvée de D^n est encore valable pour $n \leq 0$ (par définition, $D^n = (D^{-1})^{-n}$ pour $n \leq 0$).

4. (i) Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   (ii) Calculer la matrice P^{-1}.

   (iii) Sans faire les calculs explicites, expliquer comment obtenir la matrice A^n pour $n \geq 1$.

   (iv) Donner le déterminant et le rang de A^n pour $n \geq 1$.

5. (i) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des nombres réels α_n et β_n, à déterminer, tels que $D^n = \alpha_n D + \beta_n I_3$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

   (ii) Montrer qu'on a aussi la formule $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$ pour tout $n \geq 1$.

   (iii) Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\{A, I_3\}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (iv) Résoudre l'équation matricielle $X^2 = I_3$, où X est un élément quelconque de $\mathcal{N}$.

Fin et Faim !

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..